ÉCONOMÉTRIE FINANCIÈRE

Le modèle GARCH(1,1) et la dynamique de la volatilité

Comment une récurrence à trois paramètres reproduit les grappes de volatilité des rendements financiers, à quelles conditions elle est stationnaire et comment on l'estime par quasi-maximum de vraisemblance.

Intermédiaire · 10 min · GARCH · ARCH · volatilité · variance conditionnelle · Exemple — non révisé par l'auteur

Sheet by Simon-Pierre Boucher

sheet.spboucher.ai/s/le-modele-garch-1-1-et-la-dynamique-de-la-volatilite
17 novembre 2026

Les rendements financiers sont presque imprévisibles en niveau, mais leur **amplitude** ne l'est pas : les périodes agitées suivent les périodes agitées. Le modèle ARCH d'Engle [1], généralisé en GARCH par Bollerslev [2], décrit ce phénomène en faisant de la variance d'aujourd'hui une fonction du choc et de la variance d'hier.

01 Trois paramètres, une récurrence

ƒ RENDEMENT ET INNOVATION

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t = \sigma_t \, z_t, \qquad z_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, 1)$$

Le choc ε_t est un bruit standardisé z_t mis à l'échelle par l'écart-type conditionnel σ_t, connu dès la date $t-1$.

r_t	rendement (logarithmique) de la période t	% par période
μ	moyenne conditionnelle, ici constante	
ε_t	innovation : rendement non anticipé	
σ_t	écart-type conditionnel (volatilité), fonction de l'information en $t-1$	
z_t	bruit i.i.d. de moyenne nulle et de variance unitaire	

ƒ VARIANCE CONDITIONNELLE GARCH(1,1)

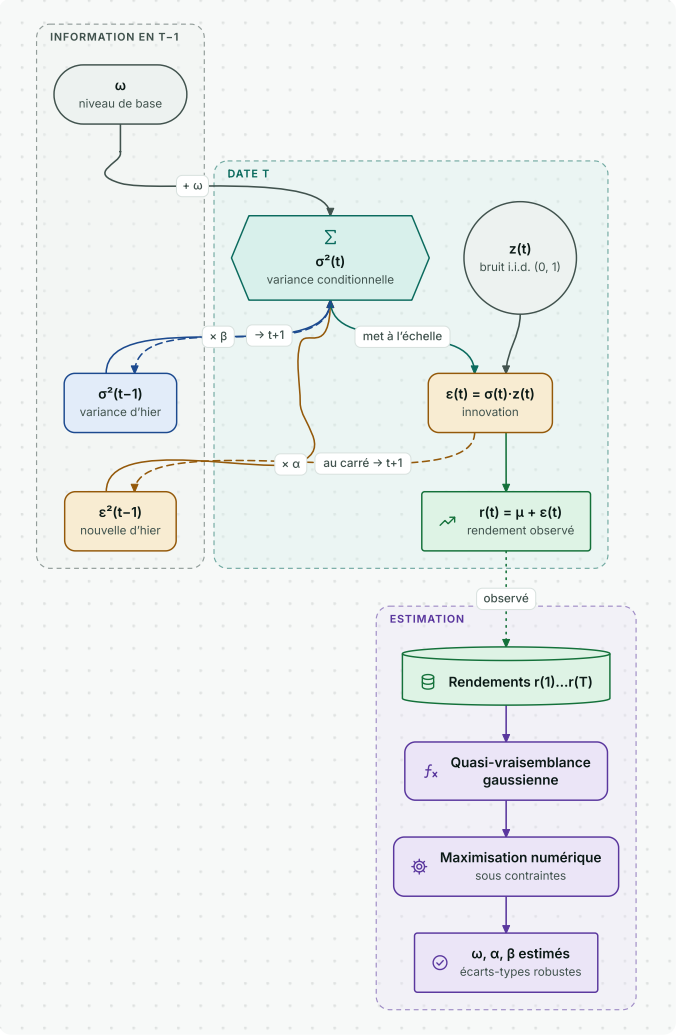
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \, \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \, \sigma_{t-1}^2$$

La variance d'aujourd'hui combine un niveau de base, la **nouvelle** d'hier (choc au carré) et la **mémoire** de la variance d'hier. Avec $\beta = 0$ on retrouve l'ARCH(1).

σ_t^2	variance conditionnelle de ε_t sachant le passé	%² par période
ω	constante, $\omega > 0$	
α	réaction au choc de la veille (effet ARCH), $\alpha \geq 0$	
β	inertie de la variance (effet GARCH), $\beta \geq 0$	

Sources : 2

La boucle de rétroaction de la volatilité



Flèche pleine : calcul à la date t
Flèche tiretée : report vers la date suivante
Ambre : canal du choc (α)
Bleu : canal de la mémoire (β)
Violet : estimation à partir des données

À chaque date, la variance est calculée à partir du passé, puis un choc est tiré ; ce choc et cette variance alimentent la date suivante.

NIVEAU

ω

Fixe, avec $\alpha + \beta$, le niveau moyen de la variance. Doit être strictement positif.

RÉACTION

α

Force avec laquelle un choc récent relève la variance. Un α élevé donne une volatilité nerveuse.

MÉMOIRE

β

Part de la variance d'hier reconduite aujourd'hui. Un β élevé donne une volatilité lisse.

PERSISTANCE

α + β

Vitesse à laquelle un choc de variance s'efface. Proche de 1 : les épisodes de turbulence durent.

02 Persistance, variance de long terme et retour à la moyenne

ƒ VARIANCE INCONDITIONNELLE

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\right] = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha+\beta<1$$

On prend l'espérance de la récurrence en utilisant $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] = \bar{\sigma}^2$. La formule n'a de sens que si $\alpha + \beta < 1$.

$\bar{\sigma}^2$	variance de long terme vers laquelle σ_t^2 revient	%² par période
$\alpha+\beta$	persistance de la variance	

Sources : 2

DÉFINITION

Grappes de volatilité

On parle de **grappes de volatilité** lorsque les grandes variations de prix tendent à être suivies de grandes variations, de signe quelconque, et les petites de petites. Dans un GARCH(1,1), les rendements ne sont pas autocorrélés, mais leurs carrés le sont : ε_t^2 suit un ARMA(1,1) de coefficient autorégressif $\alpha + \beta$ [2].

ƒ PRÉVISION À L'HORIZON H

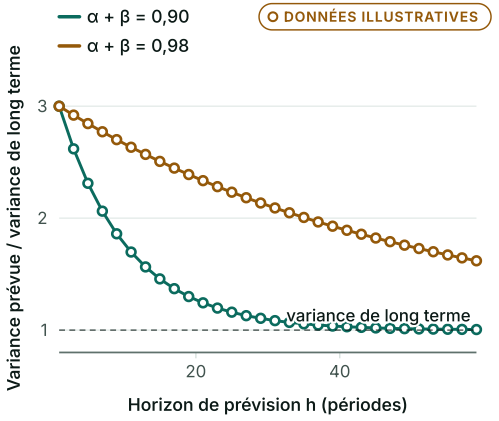
$$\mathbb{E}_t\left[\sigma_{t+h}^2\right] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}\left(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2\right), \qquad h_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(\alpha+\beta)}$$

ƒx Résultat dérivé dans cette fiche

Obtenu en itérant $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h}^2] = \omega + (\alpha+\beta)\,\mathbb{E}_t[\sigma_{t+h-1}^2]$. L'écart à la variance de long terme décroît géométriquement ; $h_{1/2}$ est le nombre de périodes au bout duquel il est divisé par deux.

$\mathbb{E}_t[\cdot]$	espérance conditionnelle à l'information disponible en t	
σ_{t+1}^2	variance du lendemain, connue en t	
h	horizon de prévision	périodes
$h_{1/2}$	demi-vie d'un choc de variance	périodes

Retour de la variance prévue vers son niveau de long terme

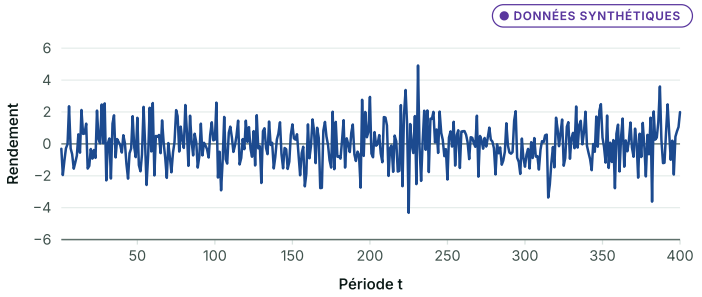


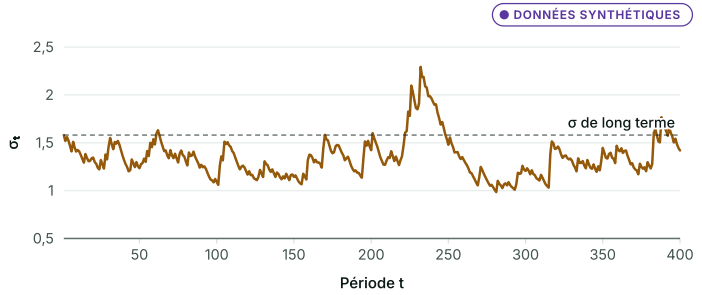
Courbes calculées avec la formule de prévision, pour une variance de départ égale à trois fois la variance de long terme (normalisée à 1). Valeurs choisies pour illustrer la forme, non estimées sur des données.

Simuler une trajectoire GARCH(1,1)

Données synthétiques — graine 7

$r_t = \sigma_t z_t$ avec $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$. La variance de long terme $\omega/(1-\alpha-\beta)$ n'existe que si $\alpha + \beta < 1$: au-delà, β est réduit automatiquement. Innovations gaussiennes, moyenne nulle : les rendements réels ont des queues plus épaisses.





Persistance α + β	Variance inconditionnelle ω/(1−α−β)	Écart-type inconditionnel	Variance de l'échantillon
0,98	2,5	1,5811	1,6963

Demi-vie d'un choc (périodes) : 34,3

Paramètres : Constante ω = 0,05 ; Réaction aux chocs α = 0,08 ; Mémoire β = 0,9 ; Périodes n = 400

Données synthétiques : rendements tirés du modèle avec les paramètres choisis et une graine fixe. Rapprochez $\alpha + \beta$ de 1 pour voir les grappes s'allonger.

03 Positivité et stationnarité

Contraintes sur les paramètres d'un GARCH(1,1) et ce qu'elles garantissent.

PROPRIÉTÉ	CONDITION	CONSÉQUENCE
Positivité	$\omega > 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$	$\sigma_t^2 > 0$ à chaque date, quelle que soit la trajectoire des chocs.
Stationnarité au second ordre	$\alpha + \beta < 1$	Variance inconditionnelle finie $\omega/(1-\alpha-\beta)$; les prévisions de variance convergent [2].
Stationnarité stricte	$\mathbb{E}\left[\ln(\beta + \alpha z_t^2)\right] < 0$	Condition plus faible que la précédente : elle admet $\alpha + \beta \geq 1$ [3].
Moment d'ordre 4 fini (z_t gaussien)	$3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1$	Kurtosis $3\,\dfrac{1-(\alpha+\beta)^2}{1-(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2} > 3$: queues plus épaisses que la loi normale [2].

ATTENTION

Le cas limite α + β = 1

Lorsque $\alpha + \beta = 1$ (GARCH intégré, ou IGARCH), la variance inconditionnelle est infinie et un choc de variance ne s'efface jamais des prévisions. Le processus reste pourtant **strictement stationnaire** lorsque $\omega > 0$ [3] : « persistance infinie » en espérance ne veut pas dire trajectoire explosive.

04 Quasi-maximum de vraisemblance

ƒ QUASI-LOG-VRAISEMBLANCE GAUSSIENNE

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \sum_{t=1}^{T} \ell_t(\theta), \qquad \ell_t(\theta) = -\frac{1}{2}\left[\ln(2\pi) + \ln\sigma_t^2(\theta) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta)}\right]$$

On maximise la vraisemblance **comme si** z_t était gaussien. Si la moyenne et la variance conditionnelles sont bien spécifiées, l'estimateur reste convergent même lorsque z_t ne l'est pas ; seuls les écarts-types doivent être corrigés [4].

θ	vecteur des paramètres $(\mu, \omega, \alpha, \beta)$
$\ell_t(\theta)$	contribution de l'observation t à la log-vraisemblance
$\varepsilon_t(\theta)$	résidu $r_t - \mu$
$\sigma_t^2(\theta)$	variance obtenue en déroulant la récurrence depuis une valeur initiale
T	nombre d'observations

Sources : 4

Filtrer la moyenne

Calculer les résidus $\varepsilon_t = r_t - \mu$ (ou ceux d'un modèle de moyenne plus riche).

Initialiser et dérouler la récurrence

Fixer σ_1^2, par exemple à la variance empirique des résidus, puis calculer σ_t^2 de proche en proche.

Maximiser la quasi-vraisemblance

Optimisation numérique sous les contraintes $\omega > 0,\ \alpha, \beta \geq 0$.

Écarts-types robustes

Utiliser la matrice de covariance « sandwich » de Bollerslev et Wooldridge, valide sans normalité [4].

Diagnostiquer

Les résidus standardisés $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}_t$ et leurs carrés ne doivent plus être autocorrélés.

HYPOTHÈSE

Ce que le GARCH(1,1) suppose

La variance réagit au **carré** du choc : une hausse et une baisse de même ampleur ont le même effet. Le modèle de base ne capte donc pas l'asymétrie souvent observée sur les actions ; des extensions (EGARCH, GJR-GARCH, entre autres) ont été proposées pour cela [5].

05 Vérifier sa compréhension

QUESTION

Un GARCH(1,1) a pour paramètres $\omega = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}08$ et $\beta = 0{,}90$. Quelle est sa variance inconditionnelle ?

A — 1

B — 0,02

C — 0,98

D — Elle est infinie

VOIR LA RÉPONSE

A — Bonne réponse. $\omega/(1-\alpha-\beta) = 0{,}02/0{,}02 = 1$.

B — Mauvaise réponse. C'est ω, la constante de la récurrence, non la variance de long terme.

C — Mauvaise réponse. C'est la persistance $\alpha + \beta$.

D — Mauvaise réponse. Elle ne serait infinie que si $\alpha + \beta \geq 1$.

Confondre variance conditionnelle et variance inconditionnelle

σ_t^2 change à chaque date et dépend du passé ; $\bar{\sigma}^2$ est une constante. Un GARCH stationnaire est **homoscédastique inconditionnellement** et hétéroscédastique conditionnellement.

Croire que le modèle prévoit le signe des rendements

Le GARCH décrit l'amplitude attendue, pas la direction : $\mathbb{E}_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$ quelle que soit σ_t.

Lire α + β ≥ 1 comme une trajectoire explosive

La condition $\alpha + \beta < 1$ porte sur l'existence de la variance. La stationnarité stricte obéit à une condition plus faible [3].

Utiliser les écarts-types du maximum de vraisemblance gaussien sans correction

Si les innovations standardisées ne sont pas gaussiennes, l'inverse de la hessienne n'estime plus correctement la variance de l'estimateur : il faut la forme robuste [4].

Oublier l'unité de temps

Les paramètres dépendent de la fréquence d'observation : un GARCH estimé sur des rendements quotidiens ne s'applique pas tel quel à des rendements mensuels.

Références

[1] Robert F. Engle (1982). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.* Econometrica, 50(4), 987. doi:10.2307/1912773

[2] Tim Bollerslev (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity.* Journal of Econometrics, 31(3), 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1

[3] Daniel B. Nelson (1990). *Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model.* Econometric Theory, 6(3), 318–334. doi:10.1017/S0266466600005296

[4] Tim Bollerslev, Jeffrey M. Wooldridge (1992). *Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances.* Econometric Reviews, 11(2), 143–172. doi:10.1080/07474939208800229

[5] Christian Francq, Jean-Michel Zakoian (2019). *GARCH Models.* Wiley. doi:10.1002/9781119313472